Differentialgleichungen im Physikunterricht

FELIX URTHALER
FELIX.URTHALER@STUD.SBG.AC.AT

Zusammenfassung

Mathematik – und damit im Besonderen auch Differentialgleichungen – haben in den aktuellen Diskussionen um die Didaktik des Physikunterrichts keinen leichten Stand. Der vorliegende Text soll einerseits Argumente für das Einbeziehen dieser Themenbereiche in den Physikunterricht liefern und andererseits Überlegungen zur praktischen Umsetzung desselben im Unterricht an einer AHS Oberstufe (ev. mit Schwerpunkt Naturwissenschaften) darlegen.

1 Einleitung: „Wissensgesellschaft" vs. Bildung

„*Wir leben in einer Wissensgesellschaft.*" schreibt der Wiener Philosoph Konrad Paul Liessmann gleich in der Einleitung seiner Streitschrift „Theorie der Unbildung" (Liessmann 2014) und meint damit, dass regelmäßig von Medien und Politikern voller Stolz verkündet wird, dass die Aneignung von Wissen im mitteleuropäischen Raum in der dokumentierten Geschichte über beinahe alle Gesellschaftsschichten hinweg nie eine derart große Rolle gespielt hat wie aktuell. „*Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob der vermeintliche Traum der Aufklärung vom umfassend gebildeten Menschen in einer rundum informierten Gesellschaft endlich Realität gewinne. Der zweite Blick auf die aktuellen Formationen des Wissens ist allerdings höchst ernüchternd.*" (Liessmann 2014, S.7)

Was kann an dem insgesamt gesteigerten Wissensdurst (im Wesentlichen) aller Gesellschaftsschichten problematisch sein? Dass „Wissen" mit „Bildung" verwechselt wird. Freilich gehört es für den „Gebildeten" dazu, gewisse Dinge zu wissen, aber dieses Wissen ist „*weder beliebig noch unendlich.*" (Liessmann 2014, S. 21). Der Autor vergleicht dabei bekannte TV-Formate wie „Wer wird Millionär" bzw. die „Millionenshow" mit Dietrich Schwanitz' Buch „Bildung – Alles, was man wissen muss" (Schwanitz 2002). In den genannten Quizshows wird Faktenwissen (etwas, das aus der Schulbildung gemäß des Paradigmas der Kompetenzorientierung verdrängt werden soll) aus den verschiedensten Wissensgebieten abgefragt, wobei eine scheinbar völlige Gleichberechtigung zwischen den verschiedenen Fragestellungen herrscht: Liessman fasst dies zusammen als die „*Gleichgültigkeit des gleich Gültigen*" (Liessmann 2014, S. 15). Es stellt sich sogleich die Frage, was aus dem scheinbar unendlichen Vorrat an Dingen, die gewusst werden können, gewusst werden soll.

Im Gegensatz zu dieser scheinbaren Gleichgültigkeit allen möglichen Wissens gibt Schwanitz in seinem Buch (wenngleich mit ironischer Distanz) durchaus vor, angeben zu können, was vom gebildeten Mitteleuropäer gewusst werden *muss* (vgl. Schwanitz 2002). Die Auswahl ist dabei zur Gänze der klassischen, humanistischen Bildung verpflichtet – (europäische) Geschichte, Literatur, Kunst und Musik sowie im zweiten Teil Sprache, Schrift, (europäische) Länderkunde sowie eine Handvoll kleiner Ergänzungen. Schwanitz' Auswahl wird in Liessmanns Ausführungen durchaus bestätigt (vgl. Liessman 2014, S. 22).

In Anbetracht dieser Diskussion, kommt man als Pädagoge der Naturwissenschaften unter Druck, das eigene Fach zu rechtfertigen. Die Autoren rund um Detlev Ganten stellen sich in dem Buch „Naturwissenschaft – Alles, was man wissen muss" (Ganten 2005) dieser Problematik in der Einleitung. Diese „Rechtfertigung" verwundert nicht, da das Buch mit Blick auf das Entstehungsjahr und den Untertitel (ähnlich wie das Buch „Die andere Bildung" von Ernst Fischer) wohl eine Art „Antwort" auf das Buch von Schwanitz sein soll. Ganten beginnt die Einleitung seines Buches mit dem Begriff der Aufklärung, geprägt durch den Philosophen Immanuel Kant (vgl. Ganten 2005, S. 14ff), und stellt Geistes- und Naturwissenschaften als zwei gleichberechtigte Zweige des menschlichen, wissenschaftlichen Strebens dar. Der mündige, gebildete Mensch sollte in beiden Bereichen einen gewissen Überblick haben um mitreden zu können.

Was kann aus dieser Diskussion für den Unterricht und im Speziellen für den Physikunterricht geschlossen werden? Ich finde, neben der aktuell sehr modernen Betonung der „Kompetenzorientierung" könnte der bisher angeschnittene Bildungsbegriff eine Orientierungshilfe bei der Stoffauswahl und Gestaltung im Unterricht sein. Welche Lehrinhalte sind „wichtiger", weil sie beispielsweise weniger „vergänglich" sind oder erlauben, tiefere Zusammenhänge zu erkennen. Welche Inhalte bilden einen roten Faden in der Physik und haben vielleicht auch noch in zwei- oder dreihundert Jahren Gültigkeit?

Diese Frage ist keineswegs leicht zu beantworten und zwingt Physiker auch, ihr Fach aus einer „gesunden" Distanz zu betrachten. Allzu leicht verfällt man dem Irrglauben, im Gegensatz zu den Geisteswissenschaften könne man den Schülern „Fakten" bieten. Welche Fakten? Mit der Entdeckung des Neutrons 1935 durch Chadwick vor 80 Jahren bestand das damalige Standardmodell neben dem Photon aus fünf weiteren Teilchen: Elektron, Proton und Neutron, aus denen sich Atome zusammensetzen sowie die in Experimenten beobachteten Positronen und Neutrinos – heute gibt es je nach Zählweise etwa fünfmal so viele Teilchen, wobei ein Drittel des alten Modells nicht mehr dazugehört (vgl. Bleck-Neuhaus 2013, S. 88f und S. 634ff). In Anbetracht dessen sind die Umwälzungen in der deutschen Linguistik im selben Zeitraum verhältnismäßig bescheiden.

Welche Errungenschaften der Physik sind tatsächlich von Dauer und werden ihre Gültigkeit nicht in ein paar Jahrzehnten komplett neu beurteilen müssen? Die Antwort auf diese Frage sollte nun nicht die Mathematik in ihrer Gesamtheit sein, da diese innerhalb aller Wissenschaften eine Sonderstellung einnimmt (wo sonst gibt es echte Beweise für Ergebnisse?), sondern das Ausbilden von *Modellen*. Es geht um die wissenschaftliche Herangehensweise der Physik im Gesamten: Mittels gewonnener Daten wird versucht, ein mathematisches Modell zu erstellen, welches wiederum für Vorhersagen verwendet werden kann. Diese können dann durch Beobachtungen in der Natur oder in Experimenten auf Berechtigung überprüft werden. Ein großer Teil der Arbeit in der Physik besteht im Umgang mit Modellen.

Wie kommen hier Differentialgleichungen ins Spiel? Soll mit Modellen und darin gültigen Gesetzmäßigkeiten gearbeitet werden, sind Differentialgleichungen eines der wichtigen technischen Mittel der Mathematik. Egal, ob das ältere Modelle wie die Axiome Newtons oder die Maxwellschen Gleichungen sind, oder ob es um Quantenmechanik oder Allgemeine Relativitäts-theorie geht, überall spielen Differential-gleichungen eine zentrale Rolle. Das heißt natürlich keineswegs, dass alle erwähnten Gebiete in hinreichendem Maße in mathematischer Ausführlichkeit in der Schule behandelt werden können oder sollen, aber mit dem Ziel, Schüler physikalisch zu bilden, sollte ihnen die Grundidee von Differentialgleichungen sowie die einfache Anwendung derselben keineswegs vorenthalten werden.

In diesem Licht erscheint auch die im Rahmen der neuen Reifeprüfung forcierte Zergliederung des Lehrstoffes im Physikunterricht (vgl. BMBF 2012, S. 12f) in „Themenkörbe" höchst frag-würdig. Möglicherweise kann die Betroffenheit und das kurzfristige Interesse der Schüler mit Themen wie „Physik und Sport", „Berühmte Experimente", oder „Naturkonstanten, ihre Bedeutung und ihre Anwendung" geweckt werden, allerdings macht es eine derartige Einteilung weit schwieriger, Zusammenhänge zu erkennen. Es kann und soll an dieser Stelle keine umfassende Diskussion zur Aufgabe von Schulunterricht geführt werden, ich möchte nur insoweit an der Oberfläche dieses Themas kratzen, wie es für die Argumentation dieser Arbeit hilfreich ist: Soll Schule (oder eben im Speziellen: der Physikunterricht) die Schüler *unterhalten* oder *bilden*?

2 Aktueller Umgang mit dem Thema

Um einen kleinen Überblick darüber zu gewinnen, inwieweit Differentialgleichungen im aktuellen Physikunterricht behandelt werden, habe ich drei verschiedene Physik-Schulbuch-reihen auf jeweils drei unterschiedliche Themen hin untersucht, welche sich gut für die Arbeit mit einfachen Differentialgleichungen eignen würden. Die drei Schulbuchreihen sind alle drei schon einige Jahre auf dem Markt, werden aber allesamt regelmäßig neu herausgegeben und wahrscheinlich dann auch im Unterricht verwendet. Diese sind:

- Sexl Physik
- Faszination Physik
- Physik compact

Die Themenbereiche, von denen ich der Meinung bin, dass man sie auf einem Niveau behandeln kann, sodass Schüler tatsächlich etwas in Bezug auf Differentialgleichungen davon mitnehmen können sind:

- beschleunigte Bewegung auf einer Geraden

- (harmonische) Schwingung
- LRC-Stromkreise

Es ist geradezu überraschend, wie wenig sich die Bearbeitungen dieser Themen in den unterschiedlichen Schulbuchreihen unterscheiden. Die beschleunigte Bewegung auf einer Geraden findet man bei „Sexl" (vgl. Sexl 2012a, S. 23), in „Faszination Physik" (vgl. Putz 2007, S. 37ff) und in „Physik compact" (vgl. Jaros 2011, S. 37f), wobei sich die Unterschiede in der Behandlung praktisch auf die optische Auf-machung reduzieren lassen. In allen dreien findet sich eine Formel für die Momentan-geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\vec{v} = \vec{a} \cdot t$$

sowie eine Formel für die (zurückgelegte) Strecke/Position in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$$

Problematisch ist meiner Meinung nach die verwendete Vektorschreibweise. Wenn diese schon Verwendung findet, sollte auch ausreichend Zeit darauf verwendet werden, wie diese zu verstehen ist und wie damit gearbeitet werden muss/kann.

Natürlich kann normalerweise zu dem Zeitpunkt, wo diese Formeln gelernt werden, nicht genauer darauf eingegangen werden, woher das Quadrat bei der Zeit und das ½ vor der Beschleunigung herkommt – dafür sind die Schüler im Normalfall im Mathematikunterricht noch nicht weit genug, aber hier könnten Differentialgleichungen ihre Stärken ausspielen und solche Fragen beantworten.

Schwerwiegender ist meiner Meinung nach das „Weglassen" der Anfangsbedingungen (auch ein wichtiger Punkt selbst bei einfachsten Differentialgleichungen). Freilich werden die Formeln kürzer und die Variablen weniger, aber die Schüler und Schülerinnen werden für diese Situationen von vorneherein nicht sensibilisiert, wodurch sie bereits bei geringfügig aufwändigeren Aufgaben mit konstanter Beschleunigung völlig aus dem Konzept geraten können. Lehrt man die Schüler und Schülerinnen von Beginn an

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{v_0} \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2$$

und

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \vec{a} \cdot t,$$

sowie die „zeitlose" Formel

$$v_E^2 = v_A^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x$$

mit$v_A = v_0, v_E = v(t)$und$\Delta x = x(t) - x_0$ kann sie im Rahmen dieser Aufgaben bis ins zweite Semester des Physikstudiums nur mehr wenig überraschen.

Bei der Behandlung von harmonischen Schwingungen gehen auch alle drei Buchreihen im Wesentlichen denselben Weg: bei „Sexl" in Band 6 (vgl. Sexl 2006, S. 70ff), „Faszination Physik" wie vorher Band 1+2 (vgl. Putz 2007, S. 103ff) und bei „Physik compact" auch Band 6 (vgl. Jaros 2012a, S. 42ff). Alle beginnen damit, dass eine harmonische Bewegung einer Sinus- oder Cosinusschwingung gleicht. Dagegen spricht natürlich nichts, allerdings hat sich offenbar eingebürgert, dass man harmonisch schwingende Systeme mit dem Schattenbild einer gleichmäßigen Kreisbewegung gleichsetzt. Dass dies aus der Sicht von Differential-gleichungen höchst plausibel ist und es für Schüler womöglich interessant sein kann, dass Sinus und Cosinus mit Kreisbewegungen zu tun haben, sehe ich absolut ein, allerdings bleibt meines Erachtens völlig unklar, womit diese Verwandtschaft motiviert bzw. begründet werden kann. Ohne die mathematischen Hintergründe bleibt dieser Zusammenhang völlig offen.

Fragwürdig ist auch die weitere Vorgehens-weise: die Ortsfunktion

$$x = r \cdot cos(\omega t)$$

wird zweimal abgeleitet, erst für v, dann für a. Hierbei ist ωdie „Winkelgeschwindigkeit" und r der „Radius" der Kreisbewegung. Erneut wirkt das Haftenbleiben an den Vokabeln einer Kreisbewegung etwas befremdlich. Es bleibt also nach zweimaligem ableiten:

$$a = -\omega^2 r cos(\omega t)$$

Zum einen haben Schüler, wenn sie Schwingungen und Wellen im Physikunterricht behandeln, oft noch keine Differentialrechnung im Mathematikunterricht gelernt – selbst wenn dies der Fall sein sollte, wurde den Lehrbüchern nach im Physikunterricht noch nicht behandelt, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung die Ableitungen von Ort und Geschwindigkeit sind. Zum anderen: auch wenn dies im Mathematik-unterricht erwähnt wurde, heißt das noch lange

nicht, dass man im Physikunterricht davon ausgehen kann, dass dies den Schülern klar ist.
Ausschließlich bei „Sexl" wird nun weiter gezeigt, dass die Beschleunigung linear (mit einem Faktor) vom Ort x abhängt. Somit wird (zwar nicht komplett, aber immerhin) aus der Sicht der Differentialgleichungen das Pferd „von hinten aufgezäumt". Nicht komplett, weil eine Rückführung der harmonischen Schwingung auf das Zweite Gesetz von Newton (etwa beim Federpendel) nicht stattfindet. Es wird lediglich über

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$$

eine „rechnerische" Abhängigkeit gezeigt.

Die Behandlung von LRC-Stromkreisen geschieht in den untersuchten Schulbuchreihen nicht so einheitlich wie bei den beiden anderen ausgewählten Themen. So werden bei allen Autoren die Begriffe *kapazitiver Widerstand* und *induktiver Widerstand* eingeführt, sowie das Verhältnis (mit Formel) zwischen *Scheitelspannung* (und *-stromstärke*) und *Effektivspannung* (*-stromstärke*). Auch wird angegeben, dass die *Blindwiderstände* die Phase zwischen Spannung und Strom verschieben können.
In „Physik compact" (vgl. Jaros 2012b, S. 79ff) wird die *Durchschnittsleistung* an einem ohmschen Widerstand grafisch hergeleitet, auf die mögliche mathematische Herleitung mittels Integral wird in einer „Vertiefungsaufgabe" verwiesen (!). Die Wirkleistung wird neben den beiden Effektivwerten ohne nähere Erklärung durch den *Leistungsfaktor* $cos\phi$ ergänzt.
Die Aufbereitung des Themas ist in „Faszination Physik" (vgl. Putz 2009, S. 61ff) derjenigen von „Physik compact" sehr ähnlich, nur dass zusätzlich zum Hinweis auf Phasenverschiebung in einem LRC-Stromkreis für den Leistungs-faktor ein kaum näher beschriebenes Zeiger-diagramm angeführt ist.
Im „Sexl" (vgl. Sexl 2012b, S. 81ff) wird für LRC-Stromkreise zusätzlich eine Formel für einen „Wechselstromwiderstand"

$$R_W = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

angegeben mit dem Hinweis, dass zur Ableitung desselben ein Zeigerdiagramm verwendet werden kann. Dazu ist eine Internetadresse angegeben, welche bereits zwei Jahre nach Erscheinen dieses Buches ins Leere führt.

Erneut gewinnt man den Eindruck, dass Formeln hier im Physikunterricht bestenfalls dafür verwendet werden, dass Schüler im Zusammenhang mit dem Stoff „rechnerisch" arbeiten können, aber es wird wenig Mühe dafür verwendet, dass die *Bedeutung* der Formeln erkannt wird. Natürlich ist eine mathematische Behandlung von LRC-Stromkreisen keineswegs trivial und kann bestimmt nicht mit jeder Klasse durchgearbeitet werden – gelingt dies aber, bekommen die erwähnten Formeln und Größen eine völlig andere Bedeutung.

3 „Echte Physik" und Lehre

Mathematik ist ein elementar wichtiger Bestandteil der Physik. Roger Penrose, hauptsächlich berühmt geworden durch seine Zusammenarbeit mit Stephen Hawking, versucht in seinem Buch „The road to reality", die Erkenntnisse der modernen Physik gemeinsam mit der dafür benötigten Mathematik komplett darzulegen. Im Vorwort zu diesem für interessierte Nicht-Mathematiker und Nicht-Physiker konzipierten Werk bemerkt er:

> *„The understanding that we have of the principles that actually underlie the behaviour of our physical world indeed depends upon some appreciation of its mathematics."*
> *(Penrose 2007, S. XV)*

Diese Sichtweise eines Mathematikers mag zunächst nicht verwundern, denn es können tatsächlich viele Ergebnisse der klassischen Physik auch mit sehr wenig Mathematik – zumindest in gewisser Hinsicht – „zufriedenstellend" behandelt werden.
Aber was ist mit der modernen Physik (es ist wohl üblich, 100 Jahre alte Ergebnisse als „modern" zu bezeichnen)? Noch schlimmer als in der klassischen Physik bleibt man beispielsweise in der Quantenmechanik höchst unbefriedigend an der Oberfläche, wenn man nicht versucht, ein paar der höchst verblüffenden Ergebnisse dieser Theorie mit etwas Mathematik zu untermauern.
Ein höchst vorbildhafter Ansatz stammt von Thomas Jordan (Jordan 2005) und ist in seinem Buch „Quantum Mechanics in simple matrix form" zu finden. Hier soll komplett ohne Hilberträume, Eigenwerte und -vektoren oder Differentialrechnung gearbeitet werden. Das Einzige was nötig ist, sind komplexe Zahlen und Matrizen. Dieses Buch entstammt laut Autor einem Kurs für College-Studenten, welche nicht Physik als Hauptfach haben, wurde aber auch

mehrfach für einen Sommerkurs für „talentierte Oberstufenschüler“ verwendet (vgl. Jordan 2005, S. viii). Es ist erstaunlich, welche Ergebnisse vom Spin über die Heisenbergsche Unschärferelation bis zur Erklärung der Stabilität des Wasserstoffatoms und seinen Energiezuständen mit diesen abgespeckten Mitteln möglich sind. Diese sind gewillten Schülern zuzumuten und so können sie die Quantenmechanik als das sehen, was sie ist:

> *„It is a mathematical language. Its character is determined largely by the mathematics that is used“*
>
> *(Jordan 2005, S. 1)*

Man kann hier kritisch anmerken, dass es auch hier einem Autor speziell darum gegangen ist, eben eine mathematische Seite der Physik zu zeigen und nicht die Physik wie sie ist. Gibt es Physik ohne Mathematik?

Betrachten wir einen komplett anders ausgerichteten Ansatz, das Buch „Physik ohne Formeln“ von Michael Munowitz. Auf den ersten Blick ähnlich wie Penrose handelt es sich hier um ein Buch, welches alle Ergebnisse der modernen Physik beschreiben möchte, von der Relativitätstheorie über Quantenmechanik bis zur Teilchenphysik – allerdings komplett ohne Formeln! Es ist zugegebenermaßen beeindruckend, welche Ideen der Autor punktuell entwickelt hat, um verschiedene Tatbestände und Ideen, welche sich mittels Mathematik schnell und sauber beschreiben lassen, eben ohne Mathematik zu veranschaulichen, allerdings ist dieser Zugang mitunter auch so weitschweifig, dass man mitunter aus den Augen verliert, worum es gerade ging. Dieser mögliche Kritikpunkt wird vom Autor im Vorwort allerdings vorweggenommen:

> *„Falls das Buch der Natur, wie Galilei meint, tatsächlich in der Sprache der Mathematik geschrieben sein sollte, dann kann der vor Ihnen liegende Band – in dem statt Gleichungen Worte und Bilder benutzt werden – kaum den Anspruch darauf erheben, eine Übersetzung zu sein. Kein Buch der Welt ist dazu imstande. Denn die Mathematik nimmt unter allen Sprachen eine Sonderstellung ein. Sie ausgenommen, sind alle Sprachen gleichermaßen effektiv, ausdrucksstark und übersetzbar: Es gibt Vereinfachungen, Analogien, Umschreibungen und Literarisierungen der Mathematik, aber nichts reicht an das Original heran. Keine Übersetzung der Mathematik erreicht einen akzeptablen Genauigkeitswert.“ (Munowitz 2006, S. 13)*

Wie sieht es mit der Mathematik im Physikstudium aus? In der mathematischen Ausbildung selbst und auch in den Teilen der Physik mit immanent stärkerer, mathematischer Ausprägung sind wohl nicht durch Zufall jene Bücher beliebt und damit erfolgreich, welche der *Vermittlung der Mathematik an sich* gebührend viel Platz und Aufmerksamkeit zukommen lassen (vgl. Papula 2011a, 2011b und 2012, sowie Nolting 2006 und Fleisch 2008).

Anders ist dies bei den beliebten Büchern für die Anfangssemester, dem „Tipler“ und dem „Halliday“. Hier soll der Schwerpunkt tatsächlich bei der „Physik“ liegen und die Mathematik soll eine untergeordnete Rolle spielen.
Konzentrieren wir uns bei dieser Betrachtung auf Differentialgleichungen, wieder mit den drei Themen, welche bereits für die Untersuchung der Schulbuchreihen herangezogen wurden.
Wie nicht anders zu erwarten, wird in beiden Büchern die geradlinig, konstant beschleunigte Bewegung mit einfachen Differentialgleichungen in Verbindung gebracht (vgl. Tipler 2006, S. 39ff und Halliday 2009, S. 27ff). Bei Tipler wird die harmonische Schwingung tatsächlich über die Differentialgleichung (DGL)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

eingeführt (vgl. Tipler 2006, S. 424ff.) und gedämpfte und erzwungene Schwingungen werden ausschließlich über DGL behandelt (vgl. Tipler 2006, S. 446). Bei Halliday wird die harmonische Schwingung erstaunlicherweise auf dieselbe Art und Weise eingeführt wie in den Schulbüchern (vgl. Halliday 2009, S. 448ff), während erst für gedämpfte und erzwungene Schwingungen auf DGL zurückgegriffen wird. Diese Darstellung wirkt allerdings etwas gekünstelt und ist keineswegs leicht nachvollziehbar. Es verfestigt sich der Eindruck, dass die Mathematik, wenn sie möglichst lange im Hintergrund gehalten wird und erst, wenn es gar nicht mehr anders geht, zum Einsatz kommt, viel schwerer zu fassen ist, weil sie weder vernünftig eingeführt noch in den Kontext eingebettet ist – sie fällt in gewissem Sinne „vom Himmel“ und macht das Leben an dieser Stelle dann schwerer anstatt zu helfen.

Dieser Eindruck wird noch viel stärker, wenn man beobachtet, wie in diesen beiden Büchern LRC-Stromkreise eingeführt werden (vgl. Tipler 2006, S. 945ff und Halliday 2009, S. 976ff): Beide versuchen sich an einer Mischung aus DGL und Zeigerdiagramm, wobei das Niveau so lange wie möglich sehr niedrig gehalten wird. Geht es aber dann „zum Kern der Sache“ ist die Argumentation etwas holprig und an einigen Stellen schwer nachvollziehbar. Es wäre wohl leichter gewesen, von Anfang an sauber mathematisch zu argumentieren.

Zwei Bücher, die in diesem Rahmen eine deutlich homogenere Herangehensweise an den Tag legen sind „Fundamentals of Physics – Mechanics, relativity and thermodynamics“ von Ramamurti Shankar (vgl. Shankar 2014) sowie der Doppelband „Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler“ von Friedhelm Kuypers (vgl. Kuypers 2009 und Kuypers 2003). Beide mögen aufgrund ihres frühen Einsatzes von Mathematik im Vergleich zu Tipler/Halliday etwas abschreckend wirken, bieten dafür ein einheitliches Niveau und gutes Fundament für den Einstieg in die theoretische Physik. An dieser Stelle soll als Vorbereitung auf das Studium an sich noch auf „Basic Training in Mathematics – A fitness program for Science Students“ (Shankar 1995) von Ramamurti Shankar verwiesen werden – mit diesem ist man für lange Zeit im Studium bestens gerüstet. Auch Shankar schreibt im Vorwort zu seinem Buch (vgl. Shankar 1995, S. viif) davon, wie wichtig solide mathematische Fähigkeiten für das erfolgreiche Arbeiten in den Naturwissenschaften sind.

Was soll man also aus der Wichtigkeit der Mathematik und im Besonderen der Differentialgleichungen in der Physik für den Unterricht schließen? Schließlich wird der Mathematik oft zugeschrieben, Physik erst so schwierig zu machen. Muss man das Niveau, auf dem man arbeiten möchte wirklich soweit hinunterschrauben, bis man glaubt, es ist tief genug, dass es jeder ohne Probleme verstehen wird? Richard Feynman hat sein Leben lang nicht nur den Ruf eines hervorragenden Physikers, sondern auch den eines ausgezeichneten Pädagogen genossen. Im Vorwort zu seinen berühmten Vorlesungen für Studien-anfänger schreibt er:

> *„Die Vorlesungen sind nicht als Übersicht gedacht, sondern sind sehr ernst gemeint. Ich gedachte, sie an die Intelligentesten der Klasse zu richten, und wollte, wenn möglich, erreichen, dass auch der intelligenteste Student nicht alles Gebotene vollständig erfassen konnte.“*
>
> *(vgl. Feynman 2007, S. XVf)*

Nimmt man als Physikpädagoge Feynman zu seinem Vorbild, ist diese Wahl bestimmt nicht die Schlechteste. Feynman wollte ja auch nicht, dass seine Vorlesungen von niemandem verstanden werden oder, dass nur wenige den Kurs bestehen. Es geht nur darum, dass *jeder* der Klasse auf dem ihm möglichen Niveau möglichst viel für sich herausholen kann. Arbeitet man auf zu niedrigem Niveau, verstehen das zwar alle, aber die guten Schüler können dann auch nicht mehr verstehen als die weniger guten.

Ein anderes Argument für den Einbau von Differentialgleichungen im Physikunterricht findet man im seit 2004 gültigen, allgemeinen Lehrplan des Bundesministeriums für Bildung und Frauen in Teil 3 unter Punkt 6, betrifft die „Gestaltung der Nahtstellen“:

> *„Vor dem Übertritt in eine weiterführende Schule bzw. zur Erlangung der Universitätsreife sind die Schülerinnen und Schüler schrittweise und gezielt auf die neuen Arbeitsweisen und Organisationsformen vorzubereiten.“*
>
> *(BMBF 2004a)*

Wenn Differentialgleichungen im universitären Bereich für die Physik so wichtig sind, sollten die Schüler zumindest die Grundzüge derselben im Schulunterricht kennen lernen. Wie aber sollen Differentialgleichungen im Unterricht gelernt und an verschiedenen Stellen des Stoffs angewandt werden, wenn dafür Differential- und Integralrechnung vonnöten ist, welche die Schüler erst im Verlauf der vorletzten und letzten Klasse lernen, während etwa beschleunigte Bewegung oder harmonische Schwingungen bereits an viel früherer Stelle gelernt werden sollen? Die Lösung bietet ein zumindest in der Mathematik altbekanntes, didaktisches Prinzip, welches in der Praxis ohnehin oft vernachlässigt wird: das *Spiral-prinzip* (vgl. DMUW 2013, S. 2).

Um zum einen das Lernen leichter zu gestalten, da nicht so viele Komplexitätsschichten auf einmal erfasst werden müssen und zum anderen durch Wiederholung den Lernertrag dauerhaft abzusichern, schlägt das Spiralprinzip vor, unterschiedliche Fachbereiche abwechselnd aufzugreifen und dabei mit steigendem Komplexitätsgrad zu behandeln. So würde sich für den Physikunterricht an einer gewöhnlichen AHS empfehlen, gegen Ende der letzten Klasse das Thema DGL aufzugreifen und beispielsweise die gleichmäßig beschleunigte Bewegung auf einer Geraden oder die harmonische Schwingung unter dem Gesichtspunkt der Differential-gleichungen noch einmal durchzuarbeiten. Erstens ist das für jene Schüler, die eventuell in diesem Fach maturieren wollen eine willkommene Wiederholung und zweitens vertieft es das Verständnis dafür, wie in der Physik gearbeitet wird. Ein möglicher praktischer Zugang zum Thema Differentialgleichungen wird im nächsten Kapitel vorgeschlagen.

4 Mögliche Umsetzung

Geht man davon aus, dass Schüler zu diesem Zeitpunkt aus dem Mathematikunterricht (gemäß Lehrplan) Differential- und Integralrechnung sowie komplexe Zahlen kennen, ist es für das folgende nur notwendig,

$$e^{ix}$$

als Bewegung auf dem *Einheitskreis* in der *komplexen Zahlenebene* einzuführen (falls den Schülern auch das aus Mathematik vertraut ist, ist es bestimmt eine gute Wiederholung), wobei *x* der Winkel in Radiant ist. Daraus folgt elegant, dass Sinus und Cosinus die Projektionen der genannten Funktion auf imaginäre und reelle Achse sind, womit auch die eulersche Formel

$$e^{ix} = cos(x) + isin(x)$$

keine größeren Rätsel mehr aufgibt. Der Zusammenhang mit der Polardarstellung komplexer Zahlen über

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy},$$

sowie die wunderschöne Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

sind einfache Möglichkeiten, das Verständnis der Schüler zu überprüfen.

Der eigentliche Zugang zu DGL erfolgt nun sehr intuitiv über Stammfunktionen. Die erste Differentialgleichung, welche Schülern präsentiert wird, könnte sein:

$$f'(x) = 2x.$$

Ähnlich, wie beim Integrieren oft versucht wird, Stammfunktionen zu erraten, versucht man bei Differentialgleichungen Funktionen zu erraten, welche die DGL erfüllen. Genauso, wie es beim Integrieren Techniken gibt, welche beim „Raten“ helfen, gibt es bei DGL Techniken, welche beim Erraten der Lösung helfen können (solche werden wir aber nicht brauchen). Um zu zeigen, dass auch Winkelfunktionen mögliche Lösungen sind, könnte als nächstes Beispiel

$$f'(x) = -cos(x)$$

gebracht werden.

Spannender ist das folgende, erste Beispiel, wo die Funktion gemeinsam mit ihrer Ableitung in der Gleichung zu sehen ist:

$$f'(x) = f(x).$$

Bei der Lösung dieser Gleichung stoßen die Schülerinnen und Schüler auf die Exponentialfunktion, welche ihnen zwar aus Mathematik bekannt ist, aber hier werden sie sehen, welche fundamental wichtige Rolle diese Funktion im Rahmen von Differentialgleichungen spielt. Da dies für spätere Aufgaben von Interesse ist, bringen wir auch erste Anklänge der Kettenregel ins Spiel:

$$f'(x) = Cf(x).$$

Vorerst nur eine Lösung hat auch die Gleichung:

$$f''(x) = f(x).$$

Finden die Schüler die dritte Lösung der Gleichung

$$f''(x) = -f(x)?$$

Wahrscheinlich nicht, weil ihnen

$$e^{ix}$$

noch nicht so geläufig ist, aber sie werden diese Funktion künftig bestimmt in ihre Überlegungen mit einfließen lassen. In Voraussicht auf die harmonische Schwingung geben wir noch als „Denksportaufgaben“

$$f''(x) = -C^2 f(x)$$

und (mit Wurzel)

$$f''(x) = -Cf(x).$$

Mit diesem Wissen ausgestattet, widmen wir uns wieder der Situation von der geradlinig, konstant beschleunigten Bewegung. Wir behaupten, dass die Beschleunigung, also die Ableitung (zeitliche Änderung) der Geschwindigkeit und somit die zweite Ableitung der Ortsfunktion, einen bestimmten Wert, beispielsweise „a" hat. Dafür schreiben wir

$$f''(t) = a.$$

Auf der Suche nach einer Lösung suchen wir nach einer Stammfunktion und erhalten erst

$$f'(t) = at + b$$

und dann beim zweiten Mal:

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c.$$

In unserer von früher bekannten Schreibweise lautet diese Gleichung

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0.$$

Die Anfangsposition und die Anfangsgeschwindigkeit sind sogenannte *freie Parameter* und ermöglichen unterschiedliche Lösungen für die Ortsfunktion, welche ihrerseits immer eine Lösung der ursprünglichen DGL ist.

Etwas interessanter ist die Anwendung der neu erworbenen Kenntnisse über DGL am Beispiel Federschwinger. Nach dem Hookeschen Gesetz kennen wir

$$F_{Feder} = -kx.$$

Vielleicht erkennen die Schüler an diesem Beispiel in welcher Richtung in der Mechanik normalerweise gearbeitet wird: Man kennt die wirkende Kraft und möchte davon auf die (zukünftige) Bewegung schließen. Dank der Axiome Newtons in Verbindung mit der Erdbeschleunigung glauben Schüler häufig, dass man im Normalfall die Beschleunigung kennt und die Kraft daraus berechnet, dabei ermöglicht Newtons zweites Axiom doch nur, eine DGL für die Bewegung aufzustellen: wegen

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

können wir obige Gleichung umformen zu

$$a(t) = -\frac{k}{m}x.$$

An dieser Stelle muss mit Nachdruck betont werden, dass im Gegensatz zum vorigen Beispiel die Beschleunigung hier *nicht* konstant ist, weil es die verursachende Kraft auch nicht war! Auch der Ort x ist natürlich mit der Zeit veränderlich, weswegen wir zum einen statt x auch $x(t)$ schreiben und an Stelle von $a(t)$ schreiben wir $x''(t)$, also

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Erinnern wir uns an die einführenden Beispiele, nur dass hier statt C der Bruch mit k und m steht, erraten wir die folgende mögliche Lösung verhältnismäßig leicht

$$x(t) = cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right).$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$$

erhalten wir die bekannte Form

$$x(t) = cos(\omega t).$$

Je nachdem, wieviel Zeit man sich nehmen möchte, kann man ausführen, dass aufgrund der zwei Ableitungen (wie im vorigen Beispiel) auch hier zwei freie Parameter sind, welche hier die Amplitude A und die Phase δ sind. Es ist also

$$x(t) = Acos(\omega t + \delta)$$

die allgemeine Lösung.

Mit fortgeschritteneren und interessierten Schülern (beispielsweise in einem Schulzweig mit naturwissenschaftlichem Schwerpunkt) kann mit ausreichend Zeit auch das Problem mit LRC-Stromkreisen mittels DGL angegangen werden. Da in einem Stromkreis mit Wechselspannung und den drei Bauteilen Ohmscher Widerstand, Kondensator und Spule an allen drei Bauteilen in Summe derselbe Spannungsabfall vorhanden sein muss wie von der Quelle zur Verfügung gestellt wird, können wir folgende Gleichung aufstellen

$$U_0cos(\omega t) = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\,(t')dt'.$$

Zur Wiederholung für die Schüler: links die Wechselspannung der Quelle mit Scheitelspannung und Winkelgeschwindigkeit, auf der rechten Seite der Gleichung die Summe der drei Spannungen an den Bauteilen – das Ohmsche Gesetz gibt uns den Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand, die von der Spule erzeugte Gegenspannung hängt von der Induktivität L und der zeitlichen Änderung der Stromstärke (also deren Ableitung) durch die Spule ab, während die Spannung des Kondensators von der Kapazität C abhängt und von der Menge Ladung, die sich auf ihm gesammelt hat (Integral nach der Zeit über die Stromstärke – mit Hilfsvariable t').

Kann man auch für diese DGL eine Lösung erraten? Wir suchen eine Funktion, die „so aussieht" wie eine Cosinusfunktion, aber auch deren Ableitung und Integral soll aussehen wie eine Cosinusfunktion, da ja die Summe dieser Teile wieder eine Cosinusfunktion sein soll. So eine Lösung können wir nicht erraten. Dies wird allerdings wieder möglich durch die geniale Idee des amerikanischen (ursprünglich deutschen) Ingenieurs Charles (Carl) Steinmetz. Wir machen aus dem reellen Problem ein komplexes. Können wir das komplexe Problem nämlich lösen, müssen wir von dieser Lösung nur die Projektion auf die reelle Achse nehmen und haben somit auch eine Lösung für das ursprüngliche, reelle Problem, da die reelle und imaginäre Komponente einer komplexen Gleichung in gewissem Sinn so unabhängig voneinander sind wie die Komponenten einer Vektorgleichung. Wir schreiben statt der vorigen DGL also

$$U_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I} + L\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}(t')dt'.$$

Wir „tun so", als gäbe es komplexe Spannung und komplexen Strom und die Projektion der letzten Gleichung ergibt wieder die erste. Können wir für diese Gleichung eine Lösung, also eine Funktion $\tilde{I}(t)$erraten, welche die DGL erfüllt? Wie wäre es mit$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$?

Setzen wir in die zweite, komplexe Gleichung ein und differenzieren und integrieren, erhalten wir

$$U_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I}_0 e^{i\omega t} + i\omega L\tilde{I}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}_0 e^{i\omega t}.$$

Heben wir heraus, können wir schreiben

$$U_0 e^{i\omega t} = \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)\tilde{I}_0 e^{i\omega t}.$$

Erstaunlicherweise kann man diese Gleichung durch den zeitlich abhängigen Faktor der komplexen Exponentialfunktion dividieren und es bleibt eine zeitlich unabhängige Gleichung, welche fast aussieht wie in den guten, alten Zeiten des ohmschen Gesetzes U=R I:

$$U_0 = \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)\tilde{I}_0.$$

Dabei ist

$$Z = \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)$$

der „komplexe Widerstand" oder die „Impedanz" und wir können schreiben:

$$\tilde{I}_0 = \frac{U_0}{Z}.$$

Der einzige Schönheitsfehler dieser Lösung ist: es ist alles noch komplex. Versuchen wir, den Realteil dieses Ergebnisses herauszufiltern sehen wir, die *Phase* des komplexen Widerstandes (als komplexe Zahl) gleicht der physikalischen Phase, um welche der Strom im Verhältnis zur Spannung verschoben ist. Außerdem ist der Betrag dieses komplexen Widerstandes der Wirkwiderstand, den man noch in manchen Schulbüchern findet. In dieser komplexen Betrachtung bekommen Zeigerdiagramme endlich einen Sinn, nämlich in der komplexen Zahlenebene. Wir führen die reale Komponente der vorigen Lösung noch explizit vor:

$$I(t) = \Re\tilde{I}(t) = \Re\tilde{I}_0 e^{i\omega t} = \Re\frac{U_0}{Z}e^{i\omega t},$$

also

$$\Re\frac{U_0}{Z}e^{i\omega t} = \Re\frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z|e^{i\omega t}} = \Re\frac{U_0 e^{i\omega t-\phi}}{|Z|}$$

und

$$\Re\frac{U_0 e^{i\omega t-\phi}}{|Z|} = \frac{U_0}{|Z|}cos(\omega t - \phi).$$

Damit gilt

$$I(t) = \frac{U_0}{|Z|}cos(\omega t - \phi)$$

mit

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

und

$$tan(\phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Im Endeffekt kann man also wieder komplett im Reellen rechnen, aber die komplexe Sichtweise ermöglich elegantes Rechnen und „erklärt" die

Formeln, die ansonsten komplett „vom Himmel fallen".

5 Zusammenfassung und persönliche Meinung

Ich habe versucht, in dieser Seminararbeit darzulegen und zu begründen, warum mathematische Bildung an sich im Physikunterricht und, im Besonderen, die Behandlung von Differentialgleichungen, aus der Sicht von *Bildung,* einen hohen Stellenwert hat. Weiters habe ich versucht zu zeigen, wie DGL im gewöhnlichen Oberstufenunterricht Einzug finden könnten. Dass der letzte Teil über LRC-Stromkreise im Normalfall an einer normalen AHS-Oberstufe nicht zielführend durchgemacht werden kann ist mir dabei vollkommen bewusst.

Meiner persönlichen Meinung nach wird von Lehrpersonen zu oft betont, was Schüler und Schülerinnen alles nicht wissen und können. Eine nur scheinbar harmlose Tautologie (sie sind ja schließlich da, um Wissen und Fertigkeiten von der Lehrperson zu lernen), da es dazu verleitet, zu glauben, die Schüler seien auch weniger intelligent. Dies mag in der verpflichtenden Unterstufe zumindest im Durchschnitt noch stimmen, ist in der Oberstufe nach rein statistischen Überlegungen aber entschieden zu hinterfragen. Sollte es einen Pädagogen nicht freuen, wenn er seinen Schülern und Schülerinnen so viel beigebracht hat und sie so für das eigene Fach begeistert hat, dass diese sich für eine höhere Ausbildung in diesem Fach entscheiden am Ende ihrer derselben mehr wissen und mehr können als man selbst?

Ich denke auch, die Physikdidaktik macht sich zu viele Gedanken darüber, wie man dem eigenen Fach die „Schwierigkeiten" nehmen kann und es möglichst „interessant" zu gestalten. Diese Maßnahmen mögen dafür sorgen, dass das Fach Physik im Laufe der Generationen an Beliebtheit gewinnt, doch bleibt offen, ob damit letztlich ein guter Dienst an der Bevölkerung des Landes getan wird. Vielleicht wäre es besser, wenn versucht wird, deutlicher herauszuarbeiten, welche Teilgebiete im Physikunterricht obligatorisch sind, und welche fakultativ. Außerdem sollten Schwierigkeiten weniger vermieden werden, sondern es sollte versucht werden, diese Schwierigkeiten so zu präsentieren, dass sie von Schülern und Schülerinnen leichter bewältigt werden können.

6 Literatur

Bleck-Neuhaus, J. (2013) Elementare Teilchen – Von den Atomen über das Standard-Modell zum Higgs-Boson. 2. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag

Feynman, R. et. al. (2007) Feynman Vorlesungen über Physik – Band 1: Mechanik, Strahlung, Wärme. 5., verbesserte Auflage, München: Oldenbourg Verlag

Fleisch, D. 2008) A students guide to Maxwell's Equations. 1. Auflage, Cambridge, New York: Cambridge University Press

Ganten, D. et. al. (2005) Naturwissenschaft – Alles, was man wissen muss. 1. Auflage, München: Deutscher Taschenbuch Verlag

Halliday, D. et. al. (2009) Physik. 2. Auflage, Weinheim: Wiley-VCH

Jaros, A. et. al. (2011) Physik compact – Basiswissen 5. 1. Auflage, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch

Jaros, A. et. al. (2012) Physik compact – Basiswissen 6. 1. Auflage, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch

Jaros, A. et. al. (2012) Physik compact – Basiswissen 7. 1. Auflage, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch

Jordan, T. (2005) Quantum mechanics in simple Matrix Form. 1. Auflage, Mineola: Dover Publications

Kuypers, F. (2009) Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Band 1: Mechanik und Thermodynamik. 1. Nachdruck der 2. Auflage, Weinheim: Wiley-VCH

Kuypers, F. (2003) Physik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Band 2: Elektrizität, Optik und Wellen. 2. Auflage, Weinheim: Wiley-VCH

Liessmann, K. (2014) Theorie der Unbildung – Die Irrtümer der Wissensgesellschaft. 8. Auflage, Wien: Paul Zsolnay Verlag

Munowitz, M. (2006) Physik ohne Formeln – Alles, was man wissen muss. 1. Auflage, Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Verlag

Nolting, W. (2006) Grundkurs Theoretische Physik 1 – Klassische Mechanik. 7. Auflage, Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag

Papula, L. (2011) Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1. 13. Auflage, Wiesbaden: Vieweg+Teubner

Papula, L. (2012) Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2. 13. Auflage, Wiesbaden: Vieweg+Teubner

Papula, L. (2011) Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3. 6. Auflage, Wiesbaden: Vieweg+Teubner

Penrose, R. (2007) The Road to Reality – A complete guide to the laws of the universe. 1. Auflage, New York: Vintage Books

Putz, B. (2007) Faszination Physik 1+2. 4. Auflage, Linz: Veritas Verlag

Putz, B. (2009) Faszination Physik 3+4. 3. Auflage, Linz: Veritas Verlag

Schwanitz, D. (2002) Bildung – Alles, was man wissen muss. 30. Auflage, München: Wilhelm Goldmann Verlag

Sexl, R. et al. (2012) Sexl Physik 5. 1. Auflage, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch

Sexl, R. und Wessenberg-Raab, B. (2006) Sexl Physik 6. 1. Auflage, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch

Sexl, R. et al. (2012) Sexl Physik 7. 1. Auflage, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch

Shankar, R. (1995) Basic Training in Mathematics – A fitness program for Science Students. 1. Auflage, New York: Plenum Press

Shankar, R. (2014) Fundamentals of Physics – Mechanics, Relativity and Thermodynamics. 1. Auflage, New Haven: Yale University Press

Tipler, P. und Mosca, G. (2006) Physik – Für Wissenschaftler und Ingenieure. 2. Auflage, München: Elsevier Verlag

DMUW (2013) Didaktik der Mathematik, Universität Würzburg, Weigand, H.-G.: Didaktische Prinzipien http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/weigand_didaktische_prinzipien.pdf (06.01.2015)

BMBF (2004) Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF). Allgemeiner Lehrplan für AHS https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf?4dzgm2 (04.01.2015)

BMBF (2004) Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF). Lehrplan für AHS Oberstufe – Physik. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_10_11862.pdf?4dzgm2 (04.01.2015)

BMBF (2012) Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF). Hg. Prof. Martin Hopf. Die kompetenzorientierte Reifeprüfung – Physik. http://lsr-t.gv.at/sites/lsr.tsn.at/files/upload_lsr/LF_PH.pdf (06.01.2015)